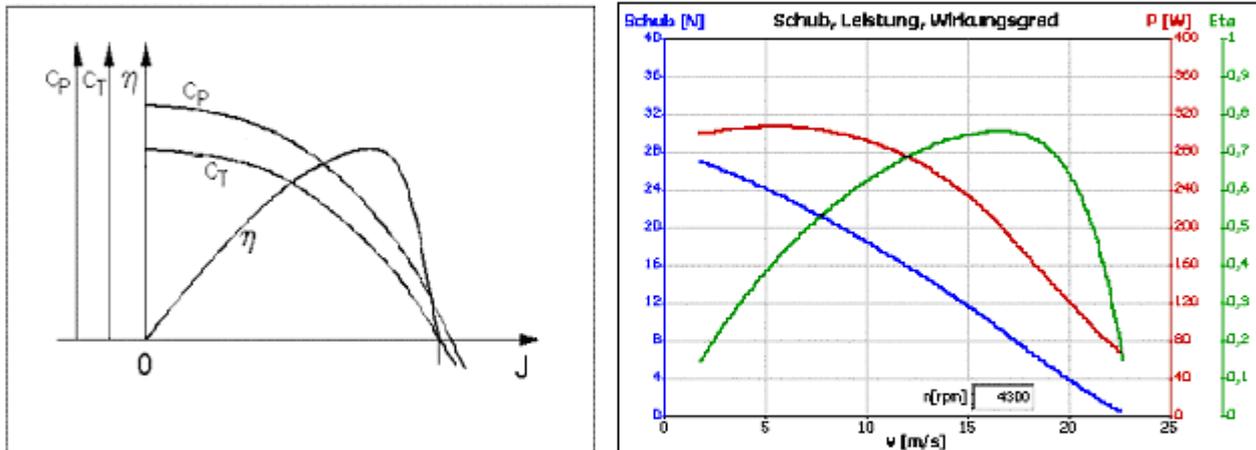


## Die Zusammenarbeit von Propeller und Elektromotor

Das Programm "PropCalc" erlaubt es, die Eigenschaften eines Propellers mit bekannter Gestalt zu berechnen; es stellt einen "virtuellen Windkanal" dar. Seine Ergebnisse werden vor allem in Diagrammen dargestellt; wahlweise in Form der sog. "Beiwerte"  $C_T$ ,  $C_P$ ,  $\eta$  abhängig vom Fortschrittsgrad  $J$ , oder auch anschaulicher direkt als Schub, Leistungsbedarf und Wirkungsgrad in Abhängigkeit von der Fluggeschwindigkeit.\*



Die Kurven für Schub und Leistungsbedarf gelten darin prinzipbedingt nur für eine bestimmte Drehzahl (die jedoch wählbar ist); man müsste daher Diagramme für eine gewisse Anzahl verschiedener Drehzahlen erstellen, um einen größeren Überblick zu gewinnen. Vor allem aber sagen diese Diagramme noch nicht viel darüber aus, welche Eigenschaften der Propeller zusammen mit einem bestimmten Motor erzielt.

**In der vorliegenden Arbeit soll nun gezeigt werden, wie man vorgehen muß, um Motor und Propeller "zusammenarbeiten" zu lassen.**

Hierzu dienen zum Einen die von PropCalc erzeugten Daten in Tabellenform ("Ergebnistabelle"); die Diagramme sind ja nur deren graphische Darstellung. Diese Tabellen können von PropCalc als Textfile ausgedruckt und/oder als Datei gespeichert werden und stehen damit zur "Weiterverarbeitung" zur Verfügung.

J	CT	CP	eta	S [N]	P [W]	v [m/s]	Re 0.7
0,05	0,0773	0,0247	0,16	19,74	301,5	2,4	156517
0,07	0,0758	0,0249	0,21	19,36	303,8	3,3	156553
0,09	0,0741	0,0250	0,26	18,92	305,4	4,2	156601
0,11	0,0722	0,0251	0,31	18,43	306,4	5,1	156660
0,13	0,0702	0,0251	0,35	17,93	306,7	6,0	156730
0,14	0,0682	0,0251	0,39	17,41	306,7	6,9	156812
0,16	0,0661	0,0251	0,43	16,87	306,2	7,8	156906
0,18	0,0639	0,0250	0,46	16,31	305,0	8,7	157010
0,20	0,0616	0,0248	0,50	15,74	303,2	9,6	157126
0,22	0,0592	0,0246	0,53	15,13	300,5	10,5	157254
0,24	0,0568	0,0243	0,56	14,50	297,2	11,4	157392
0,26	0,0543	0,0240	0,58	13,87	293,0	12,3	157542
0,28	0,0517	0,0236	0,61	13,22	287,8	13,2	157703

Ausschnitt aus einer  
Ergebnistabelle  
(in EXCEL)

\* Die Begriffe Beiwert, Fortschrittsgrad usw. werden eingehend erklärt in "Fortschrittsgrad & Co", einem Begleitscript zu PropCalc

Zum Anderen müssen natürlich die Daten des gewählten Motors bekannt sein. Die Eigenschaften eines DC-Motors + Steller können durch nur 3 Parameter hinreichend genau beschrieben werden: Drehmomentkonstante  $k_e$ , (dynamischer) Widerstand  $R_d$ , und Eisenverlustkonstante  $k_L$ . Zusätzlich muß noch die Betriebsspannung  $U$  bekannt sein.  $k_e$ ,  $R_d$  und  $k_L$  können mit anderen Programmen (z.B. "Motorrechner" oder "Drive Calculator" aus Messungen bestimmt werden und werden deshalb hier als bekannt vorausgesetzt.

## 1. Einzelner Betriebspunkt

Für die Zusammenarbeit von Motor und Propeller gilt die Bedingung, daß im Betriebspunkt die vom Propeller aufgenommene Leistung gleich der vom Motor abgegebenen Leistung sein muß. Bei Direktantrieb sind ferner die Drehzahlen vom Motor und Propeller gleich.

Für die Leistungsabgabe eines DC-Motors abhängig von der Drehzahl  $n$  gilt die die Beziehung :

$$P_m = k_e \cdot \frac{U}{R_d} \cdot \frac{\pi}{30} \cdot n - \left( \frac{k_e^2}{R_d} + k_L \right) \cdot \left( \frac{\pi}{30} \right)^2 \cdot n^2$$

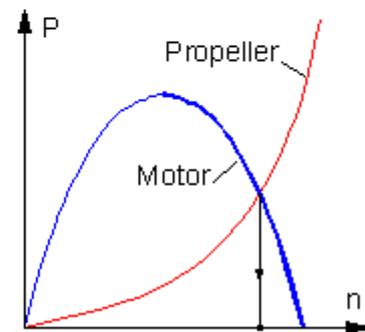
Diese Formel stellt eine Parabel dar, von der nur der mit steigender Drehzahl abfallende Teil (fett) von praktischer Bedeutung ist.

Für die Leistungsaufnahme des Propellers gilt :

$$P_p = \rho \cdot \left( \frac{n}{60} \right)^3 \cdot D^5 \cdot C_P$$

Sie stellt eine mit steigender Drehzahl ansteigende Parabel 3. Ordnung dar. Es sei zunächst angenommen, daß  $C_P$  einen bekannten, konstanten Wert besitzt, beispielsweise für den Stand.

Die beiden Leistungen müssen im Betriebspunkt gleich sein (Schnittpunkt der Kurven):



$$k_e \cdot \frac{U}{R_d} \cdot \frac{\pi}{30} \cdot n - \left( \frac{k_e^2}{R_d} + k_L \right) \cdot \left( \frac{\pi}{30} \right)^2 \cdot n^2 = \rho \cdot \left( \frac{n}{60} \right)^3 \cdot D^5 \cdot C_P$$

bzw. vereinfacht und umgestellt

$$k_e \cdot \frac{U}{R_d} \cdot \frac{\pi}{30} - \left( \frac{k_e^2}{R_d} + k_L \right) \cdot \left( \frac{\pi}{30} \right)^2 \cdot n - \rho \cdot \left( \frac{n}{60} \right)^2 \cdot D^5 \cdot C_P = 0$$

Diese quadratische Gleichung für  $n$  hat 2 Lösungen, von denen nur eine von physikalischer Bedeutung ist :

$$n = \frac{-1800}{\left[ \rho \cdot (D^5 \cdot C_P) \right]} \left[ \frac{1}{900} \cdot \pi^2 \cdot \frac{k_e^2}{R_d} + \frac{1}{900} \cdot \pi^2 \cdot k_L - \frac{1}{900} \cdot \sqrt{\pi \cdot \frac{\sqrt{\pi^3 \cdot k_e^4 + 2 \cdot \pi^3 \cdot k_e^2 \cdot k_L \cdot R_d + \pi^3 \cdot k_L^2 \cdot R_d^2 + 30 \cdot \rho \cdot D^5 \cdot C_P \cdot k_e \cdot U \cdot R_d}}{R_d}} \right]$$

Nach Umformen und Vereinfachen ergibt sich daraus :

$$n = \frac{120 \cdot \pi^2}{\rho \cdot D^5 \cdot C_P} \left[ \sqrt{\left( \frac{k_e^2}{R_d} \right)^2 + 2 \cdot \frac{k_e^2}{R_d} \cdot k_L + k_L^2} + \frac{\rho \cdot D^5 \cdot U \cdot k_e}{2 \cdot \pi^3 \cdot R_d} \cdot C_P - \left( \frac{k_e^2}{R_d} + k_L \right) \right] \quad (A)$$

**Zahlenbeispiel:**Propeller:  $D := 0.226$  [m]Fortschrittsgrad  $J := 0.62$ hierbei sind  $C_P := 0.0402$   $C_T := 0.0482$ Motorparameter:  $k_e := 0.00363$  [Nm/A]  $R_d := 0.060$   $\Omega$   $k_L := 1.38 \cdot 10^{-6}$  [Nms]Betriebsspannung  $U := 6$  [V] Luftdichte  $\rho := 1.225$  [kg/m<sup>3</sup>]

Damit wird

$$n := \frac{120 \cdot \pi^2}{1.225 \cdot 0.226^5 \cdot 0.0402} \sqrt{\left( \frac{0.00363^2}{0.060} \right)^2 + 1.38 \cdot 10^{-6} \cdot \left( 2 \cdot \frac{0.00363^2}{0.060} + 1.38 \cdot 10^{-6} \right) + \frac{1.225 \cdot 0.226^5 \cdot 6 \cdot 0.00363 \cdot 0.0402}{2 \cdot \pi^3} - \left( \frac{0.00363^2}{0.060} + 1.38 \cdot 10^{-6} \right)}$$

$$\Rightarrow n = 10066 \text{ [Upm]}$$

Das Einsetzen der Zahlen in die obige Formel dient nur zur Veranschaulichung; im "Ernstfall" lässt man das selbstverständlich den Computer erledigen und bekommt nur das Ergebnis zu sehen!

Für gefundene Drehzahl ergibt sich die Wellenleistung dann

aus der Motorgleichung  $P_m := k_e \cdot \frac{U}{R_d} \cdot \frac{\pi}{30} \cdot n - \left( \frac{k_e^2}{R_d} + k_L \right) \cdot \left( \frac{\pi}{30} \right)^2 \cdot n^2$  **(B)**  $P_m = 137.09$  [W]

oder aus der Propellergleichung  $P_p := \rho \cdot \left( \frac{n}{60} \right)^3 \cdot D^5 \cdot C_P$  **(C)**  $P_p = 137.09$  [W]

Mit der gefundenen Drehzahl und dem bekannten Fortschrittsgrad J kann jetzt auch die zugehörige Fluggeschwindigkeit v berechnet werden:

es ist gemäß Definition  $J = \frac{60 \cdot v}{n \cdot D}$  bzw. nach v aufgelöst  $v = J \cdot \frac{n \cdot D}{60}$  **(D)**

$$v := J \cdot \frac{n \cdot D}{60} \quad v = 23.5 \text{ [m/s]}$$

bzw.  $v_{\text{kmh}} := 3.6 \cdot v$   $v_{\text{kmh}} = 84.6$  [km/h] **(E)**

Weitere wichtige Größen:

Der Propellerschub beträgt  $S := \rho \cdot \left( \frac{n}{60} \right)^2 \cdot D^4 \cdot C_T$   $S = 4.34$  [N] **(F)**

Und der Propellerwirkungsgrad  $\eta_p := \frac{C_T}{C_P} \cdot J$   $\eta_p = 0.743$  **(G)**

Die Stromaufnahme des Motors  $I := \frac{U}{R_d} - \frac{k_e}{R_d} \cdot \frac{\pi}{30} \cdot n$   $I = 36.23$  [A] **(H)**

Der Motorwirkungsgrad  $\eta_m := \frac{P_m}{U \cdot I} \quad \eta_m = 0.631 \quad (I)$

Und der Gesamtwirkungsgrad  $\eta_{ges} := \eta_p \cdot \eta_m \quad \eta_{ges} = 0.469 \quad (J)$

## 2. Gesamter Betriebsbereich

Mit "gesamter Betriebsbereich" ist hier der Bereich von Fortschrittsgraden gemeint, der von PropCalc in die Ergebnistabelle geschrieben wird. Er reicht von  $J = 0,05$  bis zu dem (vom Propeller abhängigen) Wert von  $J$ , bei dem der Schub Null wird. \*

Der Weg ist einfach: Die Rechnung ( Formeln A - J ) wird für alle tabellierten Werte von  $J$ ,  $C_P$  und  $C_T$  wiederholt. Wer eine geeignete Computersprache beherrscht, kann dafür ein eigenes kleines Programm schreiben.

Einfacher geht es mit einem Tabellenkalkulationsprogramm, z.B. MS EXCEL. PropCalc kann dazu die Ergebnistabelle passend formatiert in eine sog. csv-Datei schreiben. Bei deren Anklicken wird EXCEL automatisch gestartet, und die Tabelle steht dann schon in der ersten 8 Spalten.

Von diesen 8 Spalten werden nur die ersten 3 ( $J$ ,  $C_T$ ,  $C_P$ ) gebraucht; alle anderen können gelöscht werden.

Da das Blatt eine aussagekräftige Überschrift und Angaben zu Motor und Propeller erhalten sollte, ferner die Motorparameter und die Betriebsspannung eingegeben werden müssen, und zuerst 3 Konstanten (s.u.) berechnet werden, schiebt man die Tabelle um ca. 12 Zeilen nach unten, um dafür Platz zu schaffen.

Zur Vereinfachung und zum besseren Überblick ist es zweckmäßig, in der Rechnung zuerst all die Werte in 3 Konstanten zusammenzufassen, die stets gleich bleiben. Dies sind:

$$K_1 := 14400 \cdot \pi^4 \cdot \frac{(k_e^2 + k_L \cdot R_d)^2}{\rho^2 \cdot D^{10} \cdot R_d^2} \quad (K) \quad \text{für das Beispiel} \quad K_1 = 131332$$

$$K_2 := 7200 \cdot \pi \cdot \frac{k_e}{R_d} \cdot \frac{U}{\rho \cdot D^5} \quad (L) \quad \text{für das Beispiel} \quad K_2 = 11368697$$

$$K_3 := 120 \cdot \frac{k_e^2 + k_L \cdot R_d}{R_d} \cdot \frac{\pi^2}{\rho \cdot D^5} \quad (M) \quad \text{für das Beispiel} \quad K_3 = 362.397$$

Dadurch vereinfacht sich die Formel (A) erheblich, es ist

$$n := \frac{\sqrt{K_1 + K_2 \cdot C_P - K_3}}{C_P} \quad (N) \quad \text{für das Beispiel} \quad n = 10066 \quad [\text{Upm}]$$

Anstelle von Formel (A) wird also Formel (N) verwendet.

\* PropCalc kann nicht für  $J = 0$  bzw.  $v = 0$  (Stand) rechnen. Durch Verlängern ("Extrapolieren") der Kurven von Hand bzw. mit einem Kurvenlineal kann man sich jedoch behelfen. Eine bessere und genaue Methode unter Verwendung eines Tabellenkalkulationsprogramms wird am Ende dieser Arbeit angegeben. Damit können dann z.B. auch der Standschub und die zugehörige Leistungsaufnahme des Motors berechnet werden.

Der Umgang mit EXCEL (u. a. Zellenbezüge und "Autoausfüllen") muß hier als bekannt vorausgesetzt werden. Es werden einfach aufeinander folgende Spalten mit den Formeln N und C bis J und dann die Zeilen mit "Autoausfüllen" gefüllt.

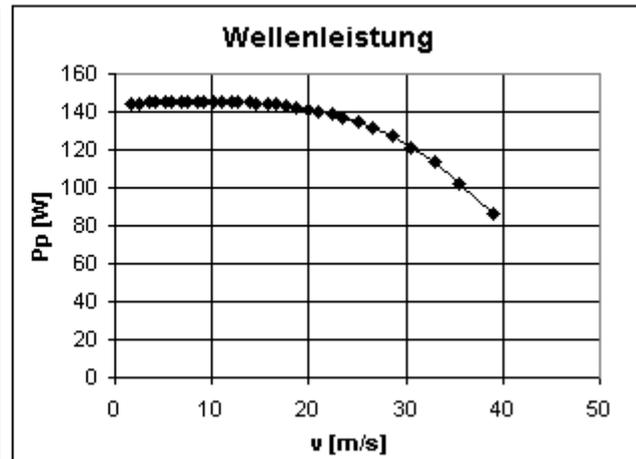
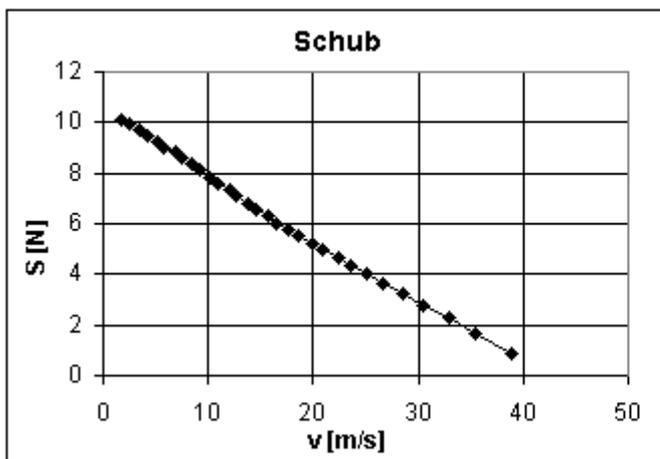
Da ein Bild mehr sagt als tausend Worte:

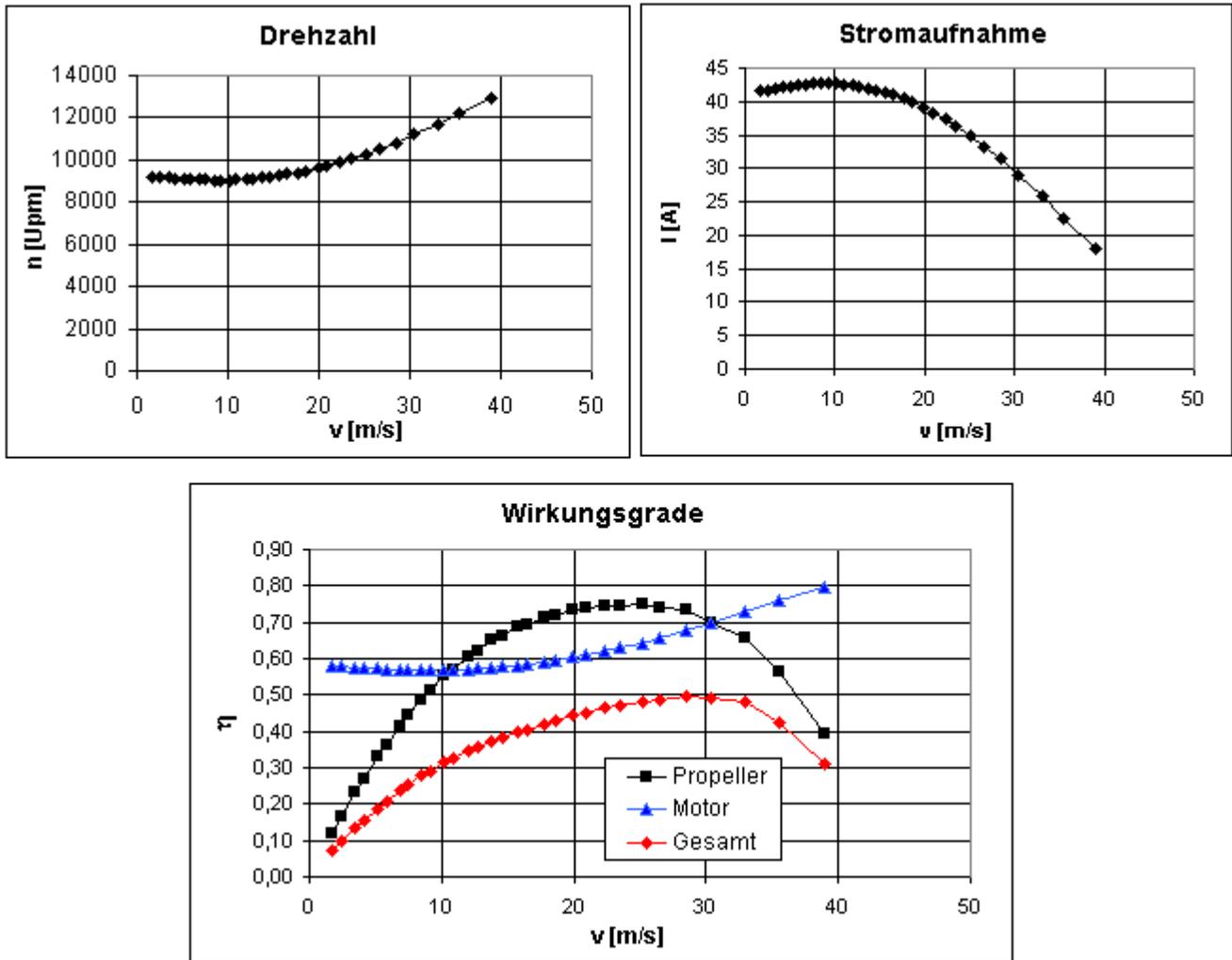
So muss das dann etwa aussehen (Ein Teil der Tabelle ist hier aus Platzgründen ausgeschnitten); persönliche Vorlieben für die Gestaltung (Farben, Muster..) sind möglich...

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	<b>Berechnung Motor + Propeller</b>												
2													
3		<b>Motor:</b> Himax 2825				<b>Propeller:</b> Taipan 9" x 6"				Spannung [V] =		6,0	
4		$k_e$ [Nm/A] = 0,00363				Durchmesser [m] = 0,226				Luftdichte [kg/m³] =		1,225	
5		$R_d$ [Ohm] = 0,060											
6		$k_L$ [Nms] = 1,38E-06											
7													
8		<b>Berechnung Konstanten:</b>			$K_1 = 131332$			$K_2 = 1,14E+07$			$K_3 = 362,4$		
9					(Formel K)			(Formel L)			(Formel M)		
10													
11	PropCalc-				Berechnete Daten der Motor/Prop-Kombination								
12	Ergebnistabelle				Formel N	Formel C	Formel D	Formel E	Formel F	Formel G	Formel H	Formel I	Formel J
13	J	CT	CP		n [Upm]	Pp [W]	v [m/s]	v [km/h]	S [N]	$\eta_p$ [-]	I [A]	$\eta_m$ [-]	$\eta_{ges}$ [-]
14	0,05	0,1337	0,055		9226	144,4	1,74	6,26	10,10	0,122	41,5	0,58	0,070
15	0,07	0,1321	0,0555		9202	144,6	2,43	8,73	9,93	0,167	41,7	0,58	0,096
16	0,1	0,1301	0,0561		9173	144,8	3,46	12,44	9,72	0,232	41,9	0,58	0,134
17	0,12	0,128	0,0568		9139	145,0	4,13	14,87	9,49	0,270	42,1	0,57	0,155
37	0,62	0,0482	0,0402		10066	137,1	23,51	84,63	4,34	0,743	36,2	0,63	0,469
38	0,65	0,0428	0,0371		10278	134,7	25,16	90,59	4,01	0,750	34,9	0,64	0,483
39	0,67	0,0372	0,0337		10530	131,6	26,57	95,67	3,66	0,740	33,3	0,66	0,487
40	0,7	0,0315	0,0301		10822	127,6	28,53	102,72	3,27	0,733	31,4	0,68	0,495
41	0,72	0,0251	0,0258		11211	121,6	30,40	109,46	2,80	0,700	29,0	0,70	0,490
42	0,75	0,0186	0,0212		11689	113,2	33,02	118,88	2,26	0,658	25,9	0,73	0,479
43	0,77	0,0122	0,0167		12236	102,3	35,49	127,76	1,62	0,563	22,5	0,76	0,427
44	0,8	0,0059	0,012		12921	86,6	38,94	140,17	0,87	0,393	18,1	0,80	0,313

Die berechneten Werte werden anschließend in Diagrammen dargestellt. Damit ergibt sich ein fast totaler Überblick über das Verhalten des Antriebs.

### Diagramm-Beispiele :





### Zusätzliche Hinweise

1.

Die Geschwindigkeit in der Tabelle und den Diagrammen darf nicht mit der tatsächlichen Fluggeschwindigkeit des Modells verwechselt werden. Diese kann irgendwo im dargestellten Geschwindigkeitsbereich liegen, abhängig vom Modell (Größe, Flächenbelastung, Profil, Widerstand usw.). Im Horizontalflug ist der Widerstand gleich dem Schub. Wenn also z.B. der Widerstandsverlauf über der Geschwindigkeit bekannt ist, dann könnte man diesen in das Schubdiagramm eintragen, und der Schnittpunkt der beiden Kurven würde dann die Fluggeschwindigkeit ergeben. Die Zusammenarbeit des Antriebs mit dem Modell ist dann eine eigene Aufgabe.

2.

Die Drehzahl, die in PropCalc für den Propeller gewählt wurde, sollte grob mit den Drehzahlen zusammenpassen, die sich in der EXCEL-Tabelle ergeben haben ( $\pm 20\%$  Abweichung sind zulässig). Der alleinige Grund dafür ist, daß die von PropCalc zugrundegelegte Re-Zahl ungefähr mit der Re-Zahl des Flugs übereinstimmen sollte. Bestehen dazwischen mehr als etwa 30% Unterschied, dann ist es angebracht, in PropCalc nochmals mit einer geänderten Drehzahl zu rechnen.

3.

Mit dem hier vorgestellten Verfahren ist es auch anschaulich und geringem Aufwand möglich, den Einfluß von Änderungen zu studieren. Beispielweise braucht man nur eine andere Betriebsspannung einzugeben und sieht dann sofort deren Einfluß auf Schub, Stromaufnahme usw.

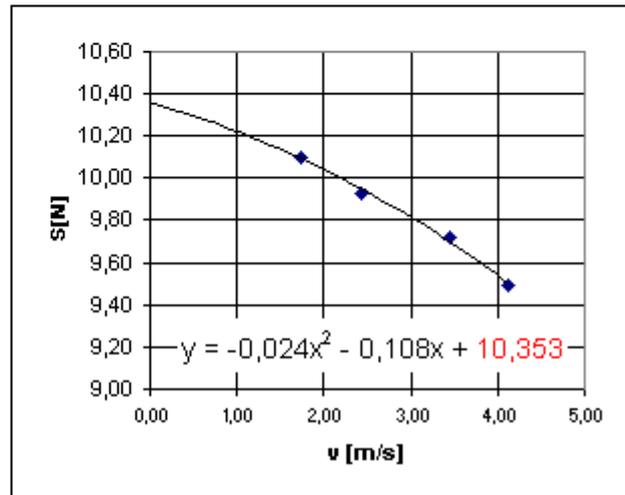
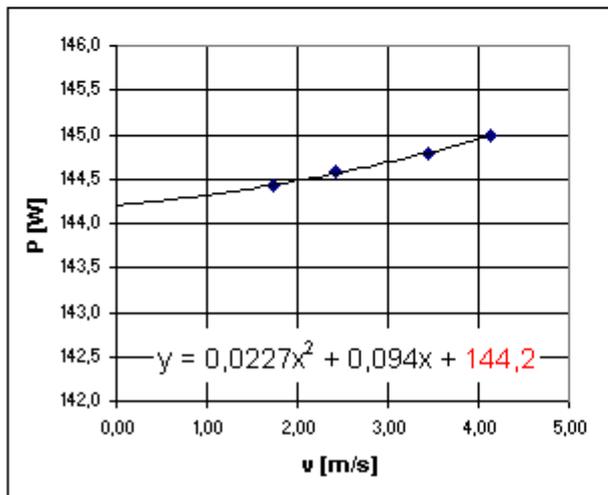
Auch die Auswirkung von geänderten Motorparametern (z.B. ein mehr oder weniger "steifer" Motor, ausgedrückt in  $k_e$  und  $R_d$ ) lässt sich so erkennen.

Mehr Arbeit wird notwendig, wenn z.B. der Blattwinkel des Propellers oder dessen Abmessungen selbst geändert werden. In diesem Fall muß natürlich zuerst der Propeller mit PropCalc neu berechnet werden.

4.

#### Bestimmung von Standwerten für Schub, Leistung usw.

Mit der "Trendlinien"-Funktion in EXCEL-Diagrammen lässt sich diese Aufgabe effizient lösen. Hierbei wird eine sog. "Fitkurve" (in EXCEL als "Trendlinie" bezeichnet) durch einige Punkte in der Nähe des Kurvenanfangs (z.B. die ersten 4 Kurvenpunkte, Beispiel s. u.) gelegt. Die Gleichung der Trendlinie kann EXCEL als Option in das Diagramm einfügen, und deren sog. "Absolutglied" (der letzte Zahlenwert in der eingefügten Gleichung) ist der gesuchte Standwert.



In Kurzform das Vorgehen:

1. Für die gewünschten Variablen die ersten 4 - 8 Werte in der Tabelle markieren und wie üblich Diagramm erstellen.
2. Im Diagramm einen der Datenpunkte anklicken und unter "Diagramm formatieren" den Punkt "Trendlinie hinzufügen" wählen.
3. In diesem Fenster dann Typ "Polynomisch" und "Reihenfolge 2" wählen (manchmal kann "Reihenfolge 3" ein besseres Ergebnis bringen). Dann unter "Optionen" das Kästchen "Gleichung im Diagramm darstellen" anklicken.
4. Nach dem Bestätigen wird dann ein Bild wie oben -aber noch im "Rohzustand"- erscheinen. Darin kann man jetzt schon das "Absolutglied" ablesen; im Beispiel oben (rot markiert) 144,2 [W] bzw. 10,3 [N].
5. Wer eine perfekte Arbeit machen will, kann jetzt noch mit den Optionen "Trendlinie formatieren" und "Datenbeschriftungen formatieren" z.B. die Stärke der Trendlinie verändern, diese bis zu P- bzw. S- Achse rückwärts verlängern, die Schrift der Gleichung "freistellen" und in der Größe und Farbe ändern usw. Das sind Routine-Arbeiten mit EXCEL, auf die hier nicht eingegangen werden soll.

=====

(C) H. Schenk 6/08

Diese Arbeit kann unter Nennung der Quelle für nichtkommerzielle Zwecke kopiert und weitergegeben werden. Der (C)-Vermerk darf nicht entfernt werden.